

T.I.P.E. - La Corde Vibrante

Aurélien DEVAUX
David GRIMBICHLER
Nicolas LE GOFF

24 décembre 2003

Table des matières

I	Introduction	3
I.1	Nécessité de chercher des solutions approchées	3
I.2	Équation	4
I.2.1	Établissement de l'équation de la corde vibrante	4
I.2.2	Changement de variables	5
II	Bases	7
II.1	Unicité et caractéristiques des solutions	7
II.2	Calculs sur les dérivées	8
II.2.1	Dérivées du premier ordre	8
II.2.2	Ordre d'approximation	9
II.2.3	Expression de la dérivée seconde	10
III	Discrétisation	11
III.1	Position du problème	11
III.2	Une méthode naïve	12
III.2.1	Établissement d'un premier schéma	12
III.2.2	Traitement du premier schéma	13
III.2.3	Implémentation	15
III.3	Transformation du problème	16
IV	Schémas	18
IV.1	Discrétisation naturelle	18
IV.2	Schéma implicite	19
IV.3	Autres schémas	20
IV.3.1	Deuxième schéma explicite	20
IV.3.2	Schéma de Lax	20
IV.3.3	Schéma de Lax-Wendroff	20
IV.3.4	Schéma de saute-mouton	21
IV.4	Implémentation	22
V	Étude des schémas	25
V.1	Stabilité	25
V.1.1	Matrices d'amplification	25
V.1.2	Conditions de stabilité	26
V.1.3	Les schémas	26
V.2	Comparaisons	29

V.2.1	Performances	29
V.2.2	Programmes	32
VI	Conclusion	35

Chapitre I

Introduction

Ce dossier concerne la résolution approchée de l'équation aux dérivées partielles régissant le mouvement d'une corde en vibration.

Tout d'abord, nous allons établir cette équation, puis par un changement de variable, nous exprimerons la forme des solutions. Nous montrerons que les solutions ne sont connues que dans certains cas bien particulier. Par conséquent, nous utiliserons une méthode de résolution numérique amenant des solutions non plus continues, mais discrètes. Ensuite, grâce à une approximation sur les dérivées secondes, nous établirons une première façon de calculer en un nombre fini de points une valeur approchée de la solution du problème. Ceci nous conduira à utiliser une autre méthode n'utilisant que des dérivées premières. Enfin, nous étudierons la stabilité des diverses méthodes introduites.

Nous ne justifierons pas théoriquement tous les résultats, et nous mettrons l'accent sur l'aspect expérimental.

Nous considérerons une corde homogène de masse linéique constante μ , tendue horizontalement le long de l'axe x – par une force T_0 . Nous la supposons infiniment souple et nous négligerons son poids et toute cause d'amortissement devant les forces de tension.

Notons que l'équation obtenue ne peut pas être résolue directement dans le cadre du programme des classes de MP.

I.1 Nécessité de chercher des solutions approchées

1. L'équation des cordes vibrantes a été établie en utilisant différentes approximations : négligence du poids, des amortissements et développement à l'ordre 0 des cosinus et des sinus de l'angle que fait la corde avec l'horizontale. Il semble donc, d'un premier point de vue, plus logique de rechercher une résolution numérique.
2. Dans le cas d'une corde frappée attachée à ses extrémités, la résolution par la méthode de Bernoulli nous conduit inévitablement à une résolution numérique. Ceci se constate à deux niveaux :
 - le calcul des coefficients fait intervenir le calcul d'intégrales ;
 - on obtient finalement une série.

Dans le cas le plus général, la solution est de la forme :

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left(\psi(x + ct) + \psi(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(y) dy \right) \quad (\text{I.1})$$

Le calcul exact de l'intégrale ne peut se faire que lorsque ϕ est une fonction simple. De plus, cette intégrale dépend à la fois de l'abscisse et du temps. Il faut donc faire un calcul pour chaque valeur de x et de t .

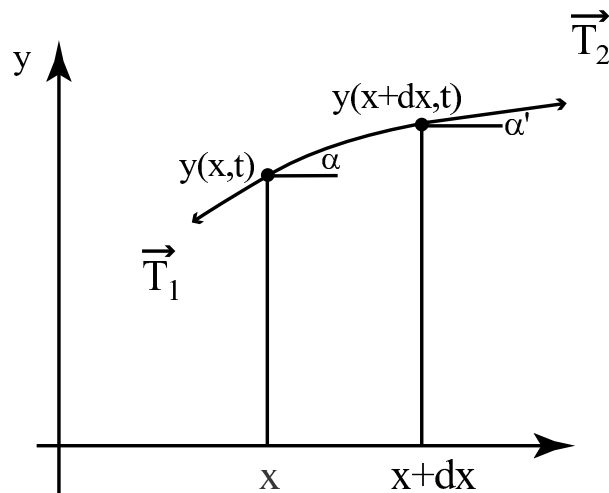
I.2 Équation

I.2.1 Etablissement de l'équation de la corde vibrante

Les hypothèses sur la corde que nous allons utiliser sont les suivantes :

- elle est homogène de masse linéique constante égale à μ ;
- elle est infiniment souple ;
- son poids sera négligé, ainsi que toutes les causes d'amortissements devant les forces de tension.

La corde peut être représentée de la manière suivante :



La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'élément de masse μdx entre les abscisses x et $x + dx$ permet d'écrire l'accélération \vec{a} de l'élément dx :

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}_2 - \vec{T}_1 = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx \quad (\text{I.2})$$

d'où

$$\mu \vec{a} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$$

Projetons sur l'axe (Ox), il n'y a pas de déplacement selon x donc :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \quad \text{soit} \quad T_x = T \cos \alpha = \text{Cste} \quad (\text{I.3})$$

Or, α étant petit, il vient :

$$T = \|\vec{T}\| = \text{Cste} = T_0 \quad (\text{I.4})$$

Le module de la tension reste donc égal à T_0 pour de faibles déformations.

On projette maintenant sur (Oy) :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{\partial (T \sin \alpha)}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{I.5})$$

car comme α est très petit on a : $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$
d'où finalement l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}} \quad (\text{I.6})$$

I.2.2 Changement de variables

Posons :

$$\xi \stackrel{def}{=} x - ct$$

et

$$\eta \stackrel{def}{=} x + ct$$

dont on tire

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}$$

et

$$t = \frac{-\xi + \eta}{2c}$$

On a donc les relations :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{I.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (\text{I.8})$$

Appliqué à y, cela donne :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{I.9})$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (\text{I.10})$$

On itère sur $\frac{\partial y}{\partial x}$ et sur $\frac{\partial y}{\partial t}$ ainsi obtenus :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (\text{I.11})$$

et

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{I.12})$$

L'équation de la corde vibrante devient alors :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \equiv -4 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (\text{I.13})$$

On l'intègre sans problème :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = F(\eta) \quad (\text{I.14})$$

donc

$$y = f(\eta) + g(\xi) \quad (\text{I.15})$$

où f et g sont deux fonctions d'une variable de classe C^2 .

Ainsi, on a :

$$y = f(\eta) + g(\xi) \quad \text{avec} \quad \eta \stackrel{def}{=} x + ct \quad \text{et} \quad \xi \stackrel{def}{=} x - ct.$$

Chapitre II

Bases

II.1 Unicité et caractéristiques des solutions

L'unicité de la solution est physiquement une évidence. Cependant, mathématiquement, l'équation n'a aucune analogie avec le problème de Cauchy. On ne peut donc utiliser ce théorème. C'est pourquoi, nous allons démontrer entièrement l'unicité et dans un même temps obtenir certaines caractéristiques de la solution.

L'équation est

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{II.1})$$

avec $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ où v est la vitesse de phase (ou de propagation) de l'onde.

Les conditions initiales sont :

$$y(x, 0) = \psi(x) \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x) \quad (\text{II.3})$$

Il s'agit de résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, avec ψ définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On a (voir précédemment le changement de variable) :

$$y(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt) \quad (\text{II.4})$$

de (II.2), on tire

$$G(x) + F(x) = \psi(x) \quad (\text{II.5})$$

puis

$$G'(x) + F'(x) = \psi'(x) \quad (\text{II.6})$$

Alors (II.4) amène

$$vF'(x) - vG'(x) = \varphi(x) \quad (\text{II.7})$$

soit

$$F'(x) - G'(x) = \frac{\varphi(x)}{v} \quad (\text{II.8})$$

En sommant les équations (II.6) et (II.8)

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{v\psi'(x) + \varphi(x)}{2v} \quad (\text{II.9})$$

et retirant (II.8) à (II.6)

$$G'(x) = \frac{v\Psi'(x) - \varphi(x)}{2v} \quad (\text{II.10})$$

Ainsi :

$$F(x) = C_1 + \frac{1}{2}\Psi(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x \varphi(y)dy \quad (\text{II.11})$$

et

$$G(x) = C_2 + \frac{1}{2}\Psi(x) - \frac{1}{2v} \int_0^x \varphi(y)dy \quad (\text{II.12})$$

Or, $y(0,0) = F(0) + G(0) = \Psi(0)$ donc $\Psi(0) = C_1 + C_2 + \Psi(0)$ d'où

$$C_1 + C_2 = 0 \quad (\text{II.13})$$

donc :

$$F(x+vt) + G(x-vt) = y(x,t) = \frac{1}{2}(\Psi(x+vt) + \Psi(x-vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \varphi(y)dy \quad (\text{II.14})$$

d'où l'unicité de y .

Réciproquement, si $y(x,t)$ est de la forme ci-dessus, alors y est de classe \mathcal{C}^2 , et vérifie (1), (2) et (3).

Pour conclure,

il existe une unique fonction y de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ solution du problème.

On remarque dans la formule donnant la forme de la solution, qu'il faut calculer une *intégrale* pour chaque couple (x,t) . Ceci nécessite donc généralement un *calcul numérique*. On obtient alors une **valeur approchée de y** . D'où l'idée naturelle de rechercher une méthode de calcul approchée de la solution.

Nous allons développer ceci, en commençant tout d'abord par des résultats théoriques sur les approximations de dérivées, puisque nous étudions une équation différentielle.

II.2 Calculs sur les dérivées

Dans cette section, nous ne nous attarderons pas sur l'étude des erreurs de troncatures ou erreurs de méthodes (induites par l'approximation), ni sur les erreurs de calculs (celles de la machine, notamment à cause de sa précision).

II.2.1 Dérivées du premier ordre

Nous allons voir comment s'exprime la dérivée première d'une fonction de classe C^1 . Cette sous partie, ainsi que celles qui suivent servent à établir des bases au niveau des définitions et de l'approximation des dérivées. Ces approximations nous seront ensuite utiles à la réécriture de l'équation des cordes vibrantes.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^4 . Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et un réel donné quelconque, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h/2) - f(x_0 - h/2)}{h} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Définissons les objets mathématiques suivants, qui pour $h > 0$ sont des *opérateurs* :

$$\Delta_h f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (\text{II.16})$$

$$\nabla_h f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0) - f(x_0 - h) \quad (\text{II.17})$$

$$\delta_h f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + h) - f(x_0 - h) \quad (\text{II.18})$$

Ces opérateurs font correspondre à toute fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , une autre fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On appelle Δ_h *différence progressive*, ∇_h *différence rétrograde*, et δ_h *différence centrée*. Les *linéarités* de Δ_h , ∇_h , et δ_h se vérifient aisément.

II.2.2 Ordre d'approximation

Si f est une fonction deux fois continûment dérivable, son développement limité au deuxième ordre exprimé à l'aide de la *formule de Taylor-Lagrange* au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$ s'écrit :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c) \quad (\text{II.19})$$

où c est un point de l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$.

Des relations (II.16) et (II.19), nous obtenons :

$$\left| f'(x_0) - \frac{\Delta_h f(x_0)}{h} \right| = \frac{1}{2} |f''(c)| h \quad (\text{II.20})$$

Cette quantité est appelée *erreur de troncature*. Elle est d'ordre h et on dit que la formule des différences finies est consistante à l'ordre 1 en h . Il en irait de même pour l'opérateur (II.17). Ainsi, **les différences finis progressives et régressives sont d'ordre 1**.

En notant

$$C = \frac{1}{2} \max_{x \in [x_0, x_0 + h_0]} |f''(x)| \quad \text{pour } h_0 > 0 \quad (\text{II.21})$$

La relation (II.20) devient

$$\left| f'(x_0) - \frac{\Delta_h f(x_0)}{h} \right| \leq Ch \quad \forall h \leq h_0 \quad (\text{II.22})$$

Considérons les développements limités obtenus avec la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(c_1) \quad (\text{II.23})$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(c_2) \quad (\text{II.24})$$

où c_1 est un point de l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ et c_2 un point de $[x_0 - h, x_0]$.

Par soustraction de (II.23) et de (II.24), puis grâce à la définition de δ_h , nous arrivons à :

$$\left| f'(x_0) - \frac{\delta_h f(x_0)}{h} \right| = \frac{1}{6} |f'''(c_1) + f'''(c_2)| \frac{h^2}{8} \quad (\text{II.25})$$

$$\leq \frac{1}{6} (|f'''(c_1)| + |f'''(c_2)|) \frac{h^2}{8} \quad (\text{II.26})$$

De la même manière que pour la formule (II.20), nous en concluons que **les différences finis centrés sont du deuxième ordre**. Leur utilisation sera donc privilégiée par souci de précision.

II.2.3 Expression de la dérivée seconde

En sommant les relations (II.23) et (II.24), nous aboutissons à

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = h^2 f''(x_0) + O(h^4) \quad (\text{II.27})$$

Ainsi,

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)) + O(h^2)} \quad (\text{II.28})$$

Chapitre III

Discrétisation

III.1 Position du problème

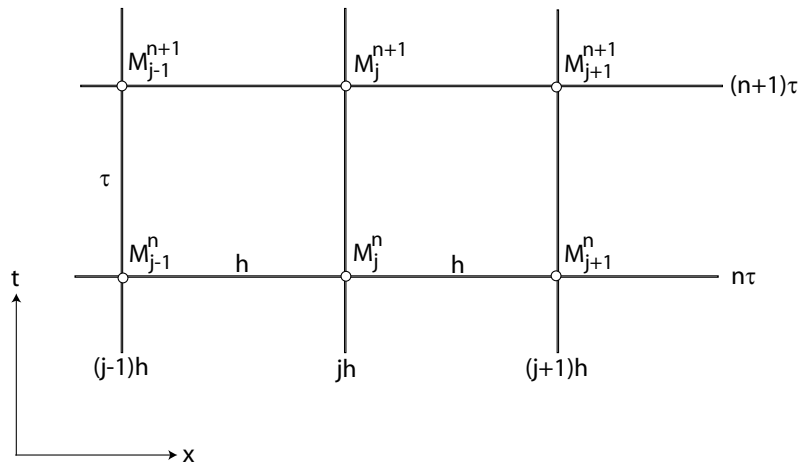


FIG. III.1 – Découpage de l'espace et du temps

On considère un pas d'espace h , un pas de temps τ , et une grille formée des points M_j^n de coordonnées $(jh, n\tau)$ dans le plan (x, t) .

Nous allons procéder pas de temps par pas de temps, selon les temps croissants. Les notations sont les suivantes :

$$u_j^n \stackrel{\text{def}}{=} u(M_j^n) \stackrel{\text{def}}{=} u(jh, n\tau) \quad (\text{III.1})$$

où M_j^n est le point d'abscisse $h \cdot j$ de l'instant $\tau \cdot n$

Supposons que les valeurs discrètes de la position de la corde y_j^n soient connues pour les indices d'espace j , et pour les instants 0 (donnée initiale), 1, 2, ..., $n-1$, n . Nous cherchons maintenant les y_j^{n+1} , $j \in \mathbb{Z}$.

Nous allons nous limiter aux *méthodes à deux niveaux*, c'est-à-dire que nous allons déterminer les y_j^{n+1} , $j \in \mathbb{Z}$, seulement à partir des y_j^n , $j \in \mathbb{Z}$, et *sans* y_j^{n-1} : on a donc "oublié" les niveaux de temps 0, 1, 2, ..., $n-1$, et on ne connaît plus que les pas n et $n+1$. Nous voulons *discrétiser* l'équation des cordes vibrantes en M_j^n , c'est-à-dire n 'obtenir les valeurs approchées de la solution qu'en un nombre fini de points. Nous n 'aurons plus une fonction continue.

Nous pouvons remarquer que, comme nous étudions un phénomène physique ne présentant pas d'importantes irrégularités, nous pouvons supposer que la fonction y est de classe C^∞ .

III.2 Une méthode naïve

III.2.1 Établissement d'un premier schéma

Nous disposons donc de l'équation des cordes vibrantes suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.2})$$

En utilisant une discrétisation de l'espace et du temps, et avec la donnée de conditions initiales et aux limites sur la corde, nous allons pouvoir déterminer la position de la corde en tout point et à tout instant.

Effectuons un développement de Taylor-Young :

$$y(x+h, t) = y(x, t) + h \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + O(h) \quad (\text{III.3})$$

et

$$y(x-h, t) = y(x, t) - h \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + O(h) \quad (\text{III.4})$$

D'où la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{y(x+h, t) - 2y(x, t) + y(x-h, t)}{h^2} \quad (\text{III.5})$$

Le tilde signifiant que c'est une valeur approchée : \tilde{y} est une valeur approchée de y .

De même, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2}(x, t) = \frac{y(x, t+\tau) - 2y(x, t) + y(x, t-\tau)}{\tau^2} \quad (\text{III.6})$$

Des deux relations ci-dessus, on tire alors :

$$\tilde{y}_j^{n+1} = 2\left(1 - \frac{\tau^2 c^2}{h^2}\right) \tilde{y}_j^n + \frac{\tau^2 c^2}{h^2} \tilde{y}_{j+1}^n + \frac{\tau^2 c^2}{h^2} \tilde{y}_{j-1}^n - \tilde{y}_j^{n-1} \quad (\text{III.7})$$

Définissons λ par

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau^2 c^2}{h^2} \quad (\text{III.8})$$

la relation devient finalement :

$$\boxed{\tilde{y}_j^{n+1} = 2(1 - \lambda) \tilde{y}_j^n + \lambda(\tilde{y}_{j+1}^n + \tilde{y}_{j-1}^n) - \tilde{y}_j^{n-1}} \quad (\text{III.9})$$

Utilisons les opérateurs (II.16) et (II.17) précédemment définis, en notant que pour une fonction f suffisamment régulière :

$$\nabla_h(\Delta_h f(x)) = \nabla_h(f(x+h) - f(x)) = f(x+h) - f(x) - (f(x) - f(x-h))$$

Soit

$$\nabla_h(\Delta_h f(x)) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$

Appliquons ceci à la fonction y :

$$\nabla_h(\Delta_h y(x, t)) = y(x+h, t) - 2y(x, t) + y(x-h, t)$$

Ceci nous conduit donc au résultat suivant (d'après le précédent chapitre) : **la méthode est d'ordre 1.**

III.2.2 Traitement du premier schéma

Ainsi, la donnée de $\tilde{y}_{j-1}^n, \tilde{y}_j^n, \tilde{y}_{j+1}^n$ et de \tilde{y}_j^{n-1} nous permet de déterminer \tilde{y}_j^{n+1} .

Regardons ce que cela donne sur le maillage :

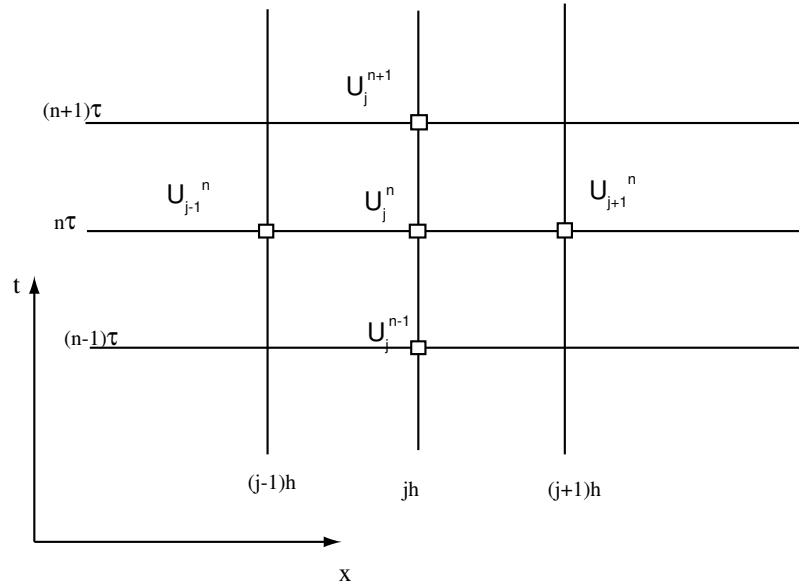


FIG. III.2 – Maillage

On remarque immédiatement que pour déterminer entièrement la position de la corde, il faut disposer de conditions aux limites, c'est-à-dire de fonctions du temps donnant la valeur de $y(0, t)$ et de $y(L, t)$ pour tout t .

Il faut également connaître la position initiale de la corde, c'est à dire au palier de temps $n = 0$, c'est à dire se donner une fonction de x donnant $y(x, 0)$ pour $x \in [0, L]$.

Mais cela ne suffit pas. En effet, pour déterminer le palier de temps $n = 1$, il nous faudrait le palier de temps à $n = -1$, ce qui est absurde !

Cependant,

$$\tilde{y}(x, t - \tau) = \tilde{y}(x, t) - \tau \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(x, t) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} \quad (\text{III.10})$$

alors la précédente relation nous donne :

$$\tilde{y}_j^1 = (1 - \lambda) \tilde{y}_j^0 + \frac{\lambda}{2} (\tilde{y}_{j+1}^0 + \tilde{y}_{j-1}^0) + \tau \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(jh, 0) \quad (\text{III.11})$$

Ainsi, on s'aperçoit qu'il nous faut une donnée supplémentaire : la vitesse initiale de la corde.

Le problème se pose finalement de la manière suivante :

– Conditions aux limites :

$$y(0, t) = \varphi(t)$$

$$y(L, t) = \psi(t)$$

– Conditions initiales :

$$y(x, 0) = w(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v(t)$$

Pour conclure, nous avons entièrement déterminé une méthode permettant le calcul de valeurs approchées de y en un nombre fini de points.

III.2.3 Implémentation

Nous avons programmé cette méthode grâce au logiciel de calcul formel MAPLE pour une corde fixée aux extrémités. Les résultats se montrent cohérents et concordent avec les expérimentations qui ont été effectuées.

Voici un exemple de ce qui est obtenu :

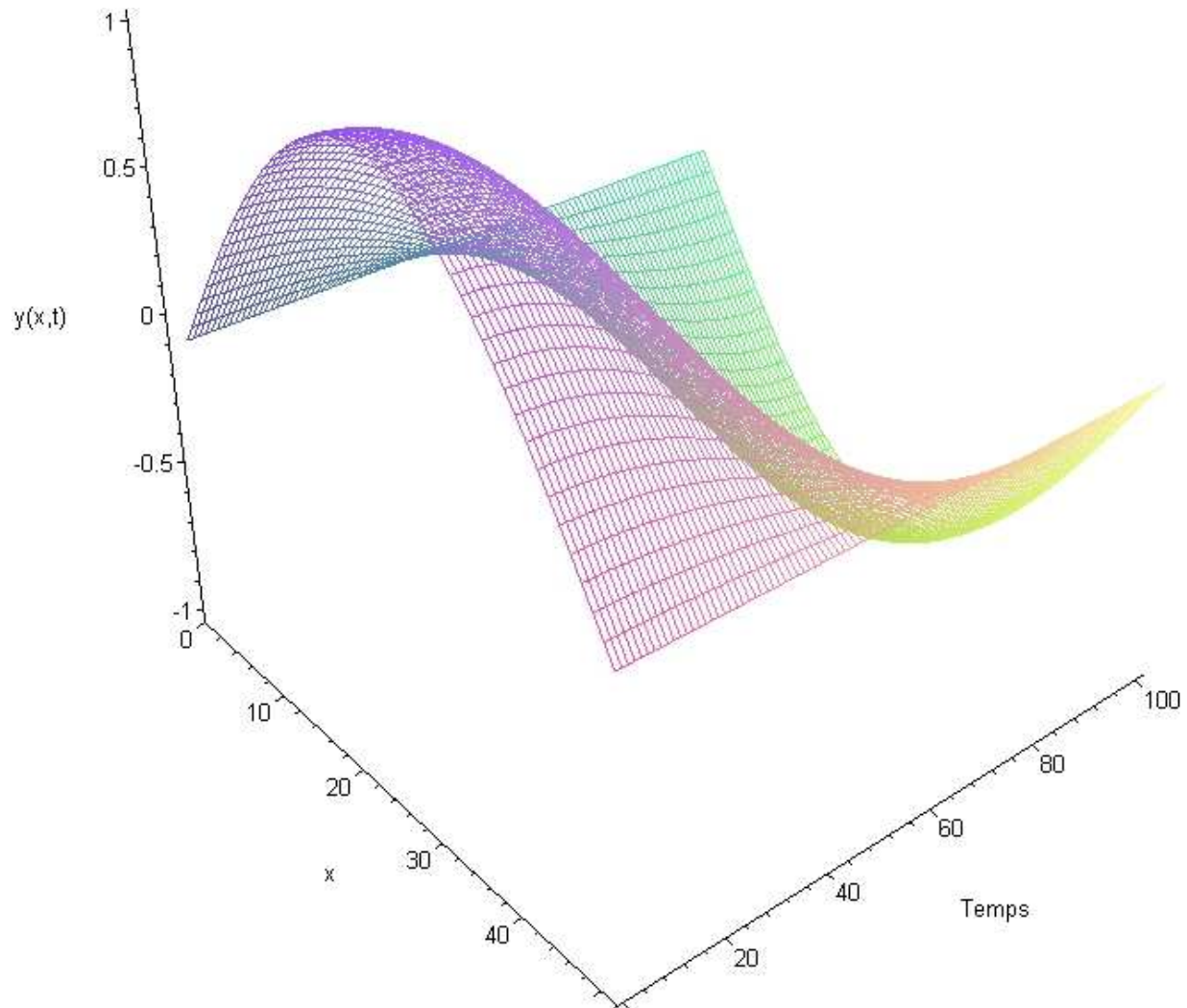


FIG. III.3 – Schéma naïf

Sur un temps 5 fois plus long, l'erreur introduite est :

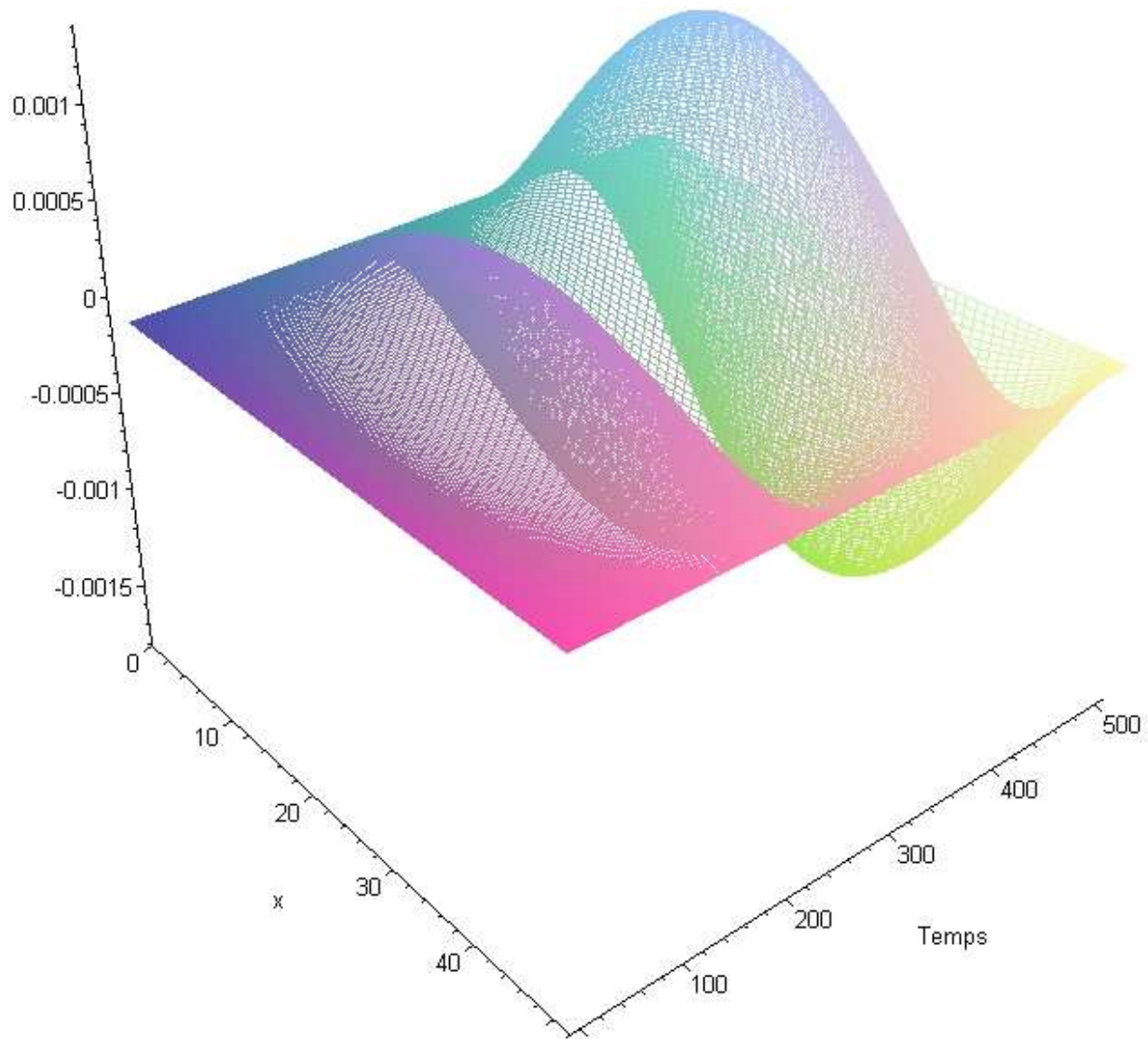


FIG. III.4 – Erreurs du schéma naïf

III.3 Transformation du problème

La méthode que nous venons de voir nécessite d'utiliser les deux paliers de temps précédents. Elle est en outre du premier ordre. Nous allons donc chercher une meilleure manière de discrétiser et de calculer des valeurs approchées de y .

Soit U une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_x[0, +\infty[$ vérifiant l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.12})$$

Pour simplifier le problème, nous posons

$$\begin{cases} v \stackrel{def}{=} \frac{\partial U}{\partial x} \\ w \stackrel{def}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

La dérivation de v par rapport au temps t amène

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = c \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{III.14})$$

Cette équation reflète la compatibilité des dérivées partielles.

De plus,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{III.15})$$

et

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{III.16})$$

Ainsi, utilisant (III.12) :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Nous avons ici transformé une équation du second ordre en deux équations du premier ordre. Nous pouvons faire ici une **remarque très importante** : ce système définit entièrement les deux fonctions v et w , sans faire intervenir la fonction U . Nous ne nous soucierons plus de cette fonction à l'avenir, et nous ne cherchons pas à la calculer.

La dérivation de la première équation de (III.17) par rapport à x donne

$$\frac{\partial v}{\partial x \partial t} = c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{III.18})$$

La fonction U étant de classe C^2 , le théorème de Schwarz peut être appliqué :

$$\frac{\partial v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v}{\partial t \partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{III.19})$$

d'où

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{III.20})$$

La démonstration serait la même pour v . Ainsi,

v et w satisfont à l'équation des cordes vibrantes

Revenons au problème de départ qui est la recherche de la fonction $(x, t) \rightarrow y(x, t)$, solution de l'équation des cordes vibrantes. Pour cela, nous allons faire intervenir une nouvelle fonction $(x, t) \rightarrow z(x, t)$, de classe C^∞ et définie sur le même ouvert que la fonction y , c'est-à-dire $\mathbb{R}_x[0, +\infty[$. Cette fonction est définie par la relation

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = c \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases}} \quad (\text{III.21})$$

De cette manière, seules des dérivées premières seront utilisées. Le calcul naïf direct à l'aide de (III.12) est plus lourd et ne permet pas d'aller aussi loin.

Chapitre IV

Schémas

IV.1 Discrétisation naturelle

En procédant pas de temps par pas de temps croissant, nous allons utiliser une *discrétisation à deux niveaux* : on ne prendra en compte que les éléments calculés la ligne en dessous. Nous nous plaçons encore dans le cas général de données initiales quelconques. Le temps et l'espace sont découpés grâce un maillage rectangulaire de pas spatial h et de pas temporel τ .

En utilisant une *différence finie décentrée avançante en temps* au point M_j^n :

$$\begin{cases} \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_j^n + O(\tau) \\ \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\tau} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_j^n + O(\tau) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Les dérivées partielles sont ici du premier ordre en h et en τ , la discrétisation sera donc *du premier ordre*.

Puis, grâce à une *différence finie centrée en espace* :

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1}^n - y_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_j^n + O(h) \\ \frac{z_{j+1}^n - z_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_j^n + O(h) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Alors, négligeons le $O(h)$:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right)_j^n \\ \frac{\tilde{z}_{j+1}^n - \tilde{z}_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \right)_j^n \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Le système (III.21), nous conduit à

$$\begin{cases} \frac{\tilde{y}_j^{n+1} - \tilde{y}_j^n}{\tau} = \frac{\tilde{z}_{j+1}^n - \tilde{z}_{j-1}^n}{2h} \\ \frac{\tilde{z}_j^{n+1} - \tilde{z}_j^n}{\tau} = \frac{\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n}{2h} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Nous obtenons finalement une discrétisation, ou *schéma*, dit "naturel" du fait de la simplicité du raisonnement :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{z}_{j+1}^n - \tilde{z}_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) \end{cases}} \quad (\text{IV.5})$$

Ce premier schéma est dit *explicite*, car on obtient \tilde{y}_j^{n+1} et \tilde{z}_j^{n+1} directement à partir de ce qui a été précédemment calculé.

On peut remarquer en outre que :

$$\left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}\right)_j^n = \frac{\delta_{hy}(jh, n\tau)}{h}$$

et que

$$\left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}\right)_j^n = \frac{\Delta_{\tau y}(jh, n\tau)}{\tau}$$

En supposant que l'opérateur porte dans le premier cas sur la première variable et dans le deuxième cas sur la deuxième variable.

Ainsi, ce schéma est du premier ordre en t et du deuxième ordre en h .

Nous verrons dans la troisième partie que ce schéma n'est pas correct et ne fournit jamais la solution recherchée !

IV.2 Schéma implicite

Dorénavant, nous allons employer des dérivées spatiales au niveau $n + 1$. Les *différences finies* deviennent :

$$\begin{cases} \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_j^n + O(\tau) \\ \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\tau} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_j^n + O(\tau) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{y_{j+1}^{n+1} - y_{j-1}^{n+1}}{2h} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_j^{n+1} + O(h) \\ \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_{j-1}^{n+1}}{2h} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_j^{n+1} + O(h) \end{cases}$$

Nous parvenons à :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{z}_{j+1}^{n+1} - \tilde{z}_{j-1}^{n+1}) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^{n+1} - \tilde{y}_{j-1}^{n+1}) \end{cases}} \quad (\text{IV.6})$$

Les différentes inconnues \tilde{y}_j^{n+1} et \tilde{z}_j^{n+1} sont liées et ne peuvent pas être calculable directement. Le schéma est alors dit *implicite*. La solution s'acquiert en résolvant un système linéaire. Ceci a bien sûr un coût important, mais nous verrons au troisième chapitre que le schéma est toujours satisfaisant au sens où la méthode fournit un bon résultat.

Remarquons que ce schéma peut être déduit du précédent en permutant n et $n + 1$, et en changeant τ en $-\tau$.

De même que pour le précédent schéma, cette méthode est du premier ordre en t et du deuxième ordre en h .

IV.3 Autres schémas

IV.3.1 Deuxième schéma explicite

Utilisons maintenant des dérivées spatiales de niveau $n + 1$ uniquement pour z . Les *différences finies* deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_j^n + O(\tau) \\ \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\tau} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_j^n + O(\tau) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{j+1}^{n+1} - y_{j-1}^{n+1}}{2h} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_j^{n+1} + O(h) \\ \frac{z_{j+1}^n - z_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_j^n + O(h) \end{array} \right.$$

Ceci fournit le schéma suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (z_{j+1}^n - z_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = z_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^{n+1} - \tilde{y}_{j-1}^{n+1}) \end{cases}} \quad (\text{IV.7})$$

Remarquant les indices $n + 1$ de la deuxième équation, on pourrait penser que le schéma est implicite. Ce n'est pourtant pas le cas. En introduisant la première équation dans la deuxième, le caractère *explicite* transparaît clairement :

$$\tilde{z}_j^{n+1} = z_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) + c^2 \frac{\tau^2}{4h^2} (z_{j+2}^n - 2z_j^n + z_{j-2}^n)$$

Ce schéma est du premier ordre en t et du deuxième ordre en h .

Nous montrerons que ce schéma ne peut être utilisé que dans certains cas. Les conditions portent sur les données initiales.

IV.3.2 Schéma de Lax

Remplaçons dans le schéma "naturel" (IV.5) \tilde{y}_j^n et \tilde{z}_j^n par la moyenne des valeurs voisines (en $j - 1$ et en $j + 1$). Ceci correspond à un "lissage" préalable des valeurs discrètes au niveau n . Le schéma est donc :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\tilde{y}_{j+1}^n + \tilde{y}_{j-1}^n) + c \frac{\tau}{2h} (z_{j+1}^n - z_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (z_{j+1}^n + z_{j-1}^n) + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) \end{cases}} \quad (\text{IV.8})$$

Le schéma est du premier ordre en t et du deuxième ordre en h .

Le schéma de Lax donne les mêmes résultats "à l'oeil" que le deuxième schéma explicite

IV.3.3 Schéma de Lax-Wendroff

Nous n'avons obtenu jusqu'à présent que des schémas du premier ordre. Nous allons nous intéresser à la recherche d'un schéma du second ordre afin d'obtenir une meilleure précision (celle-ci sera étudiée au chapitre V).

Développons y par rapport au temps :

$$y_j^{n+1} = y_j^n + \tau \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_j^n + O(\tau^3) \quad (\text{IV.9})$$

D'après (III.21), nous avons $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_j^n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_j^n$. De plus, y vérifie l'équation des cordes vibrantes,

$$\text{d'où } \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_j^n = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_j^n.$$

Alors,

$$y_j^{n+1} = y_j^n + c\tau \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_j^n + c^2 \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_j^n + O(\tau^3) \quad (\text{IV.10})$$

Soit

$$y_j^{n+1} = y_j^n + c\tau \left(\frac{z_{j+1}^n - z_{j-1}^n}{2h} + O(h)\right) + c^2 \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2)\right) + O(\tau^3) \quad (\text{IV.11})$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (z_{j+1}^n - z_{j-1}^n) + c^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (\tilde{y}_{j+1}^n - 2\tilde{y}_j^n + \tilde{y}_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) + c^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (\tilde{z}_{j+1}^n - 2\tilde{z}_j^n + \tilde{z}_{j-1}^n) \end{cases}} \quad (\text{IV.12})$$

On remarque que si $\tau = O(h)$, ce schéma est bien du second ordre.

IV.3.4 Schéma de saute-mouton

Dans cette section nous allons étudier un schéma à *trois niveaux*, c'est-à-dire trois lignes ($t = (n-1)\tau$, $t = n\tau$, et $t = (n+1)\tau$). Nous pourrions donc prendre des différences finies centrées en temps, de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_j^{n+1} - y_j^{n-1}}{2\tau} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_j^n + O(\tau) \\ \frac{z_j^{n+1} - z_j^{n-1}}{2\tau} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_j^n + O(\tau) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{j+1}^n - y_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_j^n + O(h) \\ \frac{z_{j+1}^n - z_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_j^n + O(h) \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^{n-1} + c \frac{\tau}{h} (z_{j+1}^n - z_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^{n-1} + c \frac{\tau}{h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) \end{cases}} \quad (\text{IV.13})$$

Ce schéma est explicite au premier ordre. Lorsqu'il y a des conditions initiales, elles ne portent normalement que sur la première ligne ($t = 0$). Il faut donc *initialiser* la ligne $t = \tau$. Cette tâche peut être réalisée avec un quelconque schéma à deux niveaux. Vu l'étude faite sur le premier schéma explicite, ce schéma est du second ordre.

IV.4 Implémentation

Voici ce qui est obtenu après implémentation de la méthode :

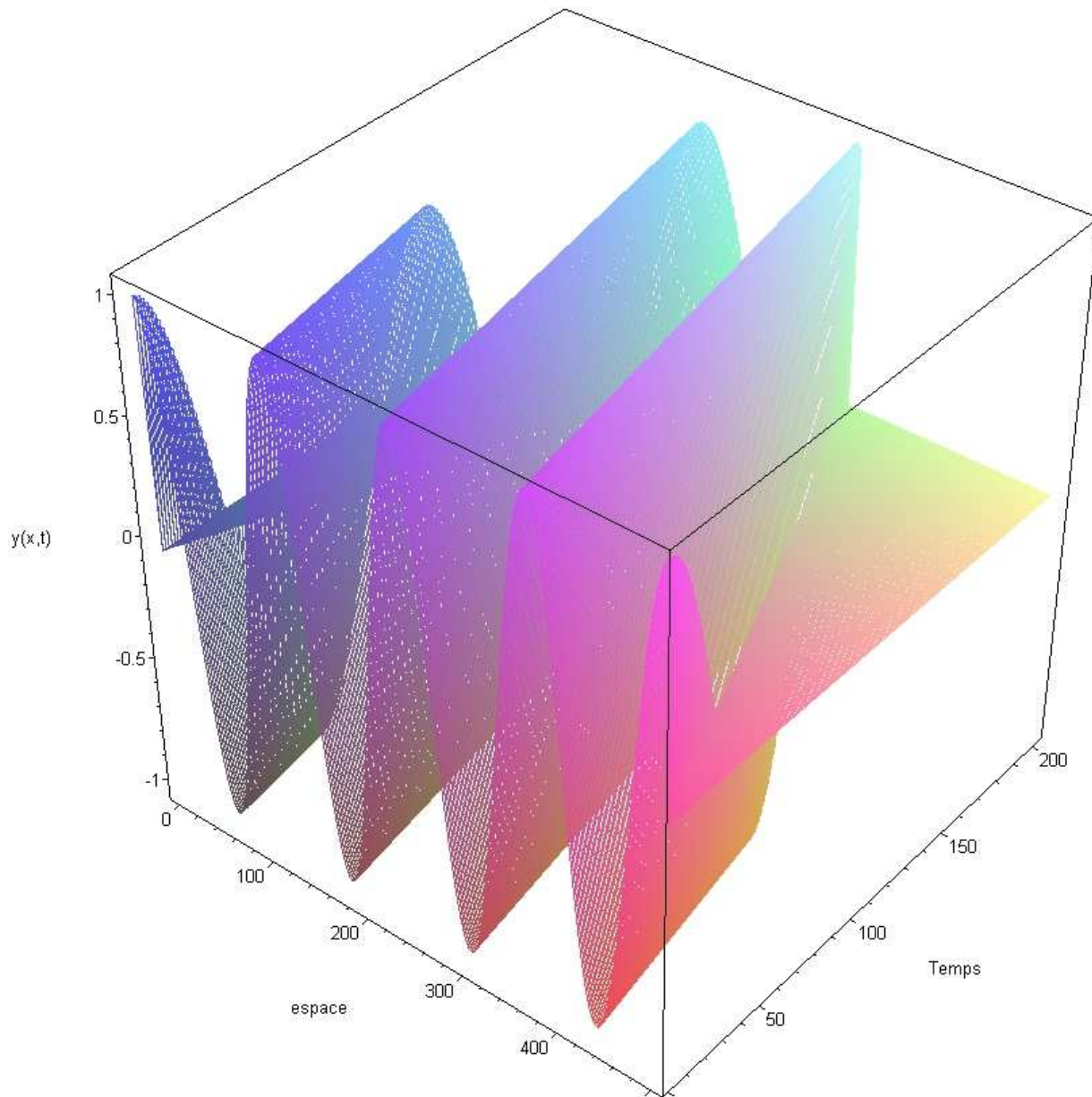


FIG. IV.1 – Schéma explicite dans la zone de détermination

On voit ici clairement apparaître un zone dans laquelle la valeur obtenue est nulle. Cette valeur est tout simplement celle fixée par défaut : aucun calcul n'a été effectué en ces endroits. Ceci se voit grâce à la figure (III.1).

En effet, il faut un certain nombre de points sur la ligne n pour calculer un seul point de la ligne $n + 1$ (donc à l'instant $(n + 1)\tau$). Il existe donc une *zone de détermination*, dans laquelle on peut déterminer une valeur approchée y , et en dehors de laquelle on ne peut rien calculer.

Voici le résultat lorsqu'on prend un compte un rectangle inclu dans la zone de détermination :

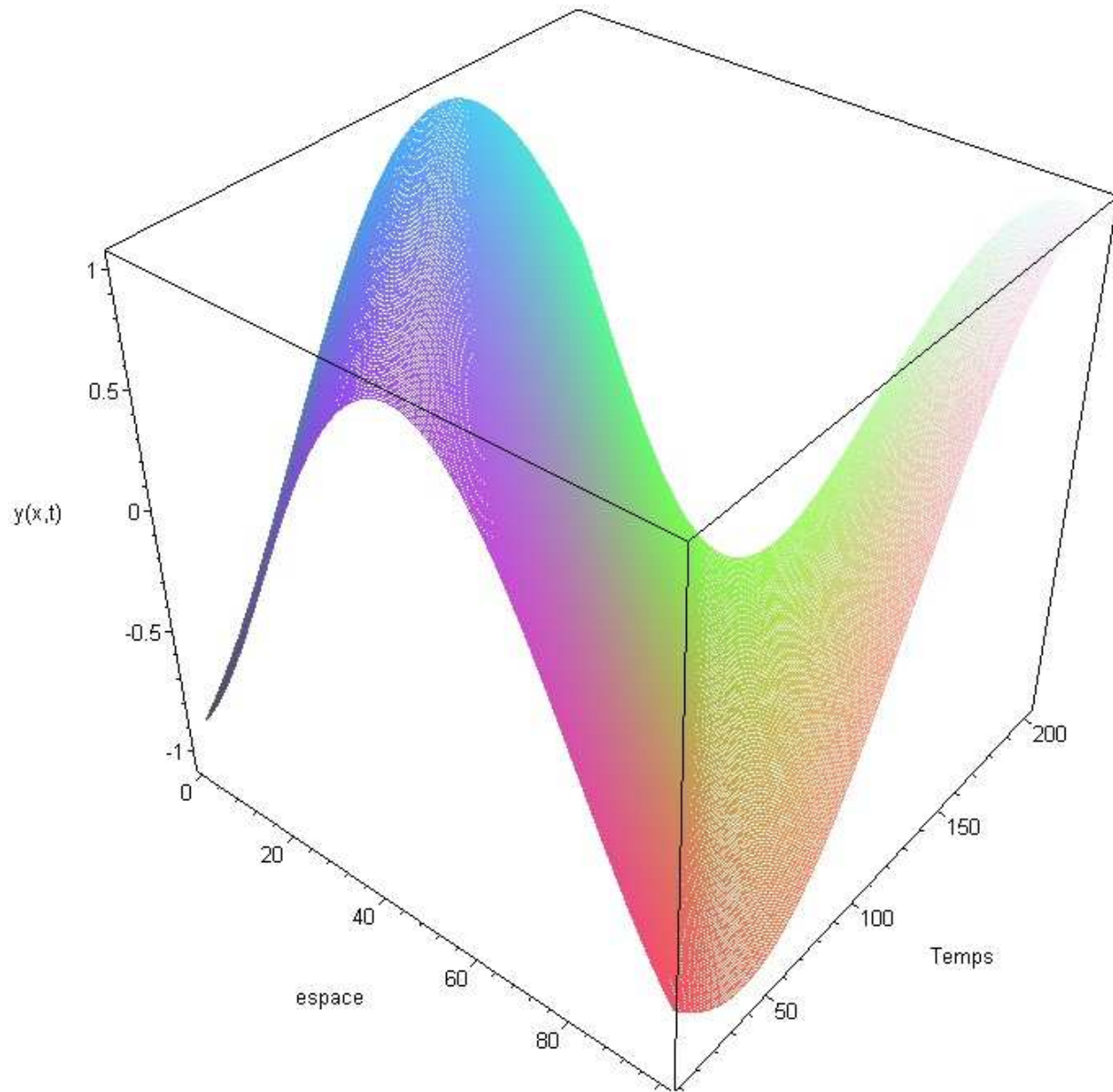


FIG. IV.2 – Schéma explicite

On peut observer le déplacement de l'onde dans le temps. Ce résultat correspond bien à ce qui est attendu.

Si on regardait la corde en face, on verrait :

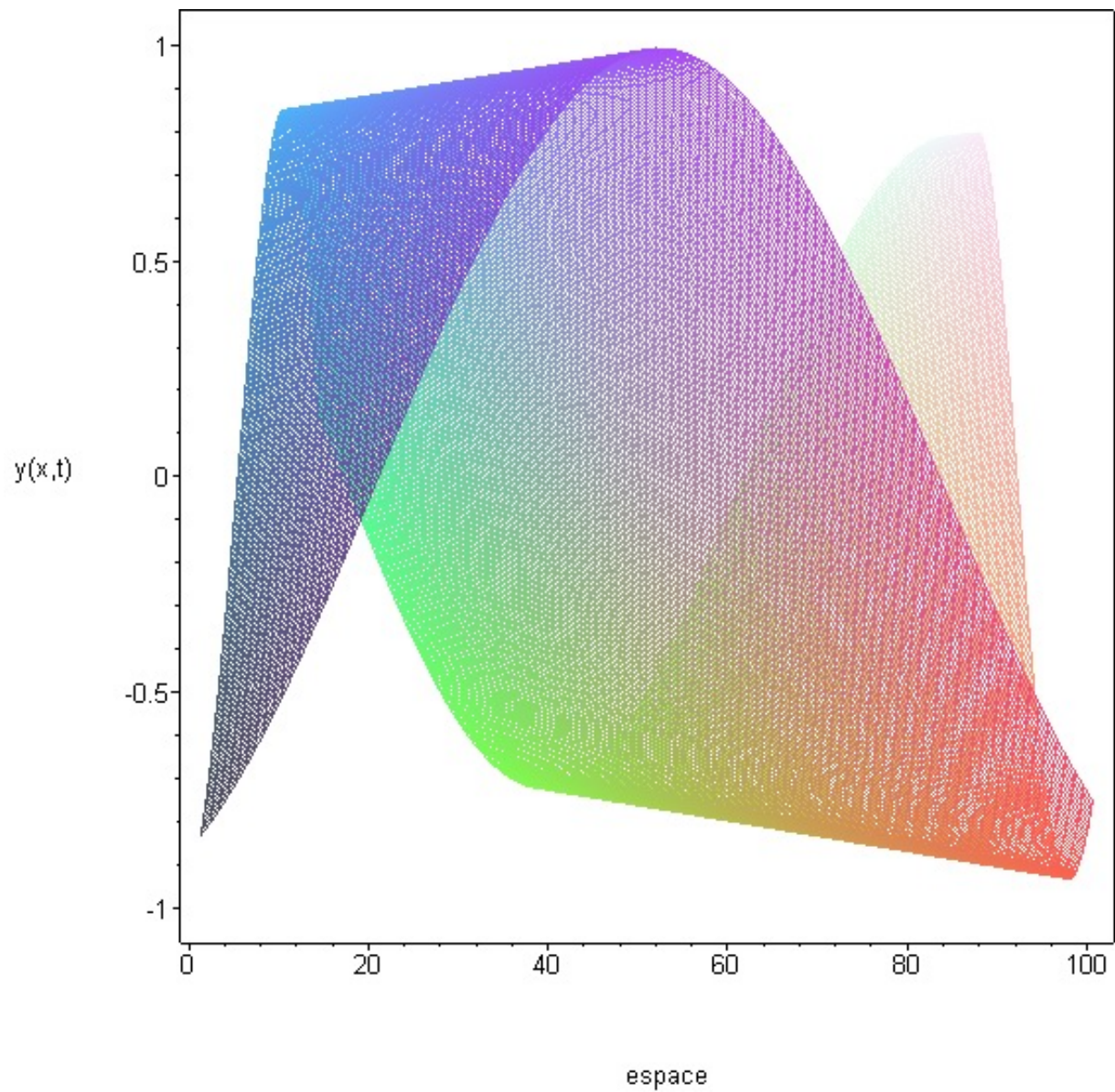


FIG. IV.3 – Schéma explicite projeté sur le plan $z = 0$

On a utilisé ici l'option "Projection" (avec une valeur de 0,8) du logiciel de calcul formel MAPLE.

Chapitre V

Étude des schémas

V.1 Stabilité

V.1.1 Matrices d'amplification

Nous allons voir que la stabilité d'un schéma s'étudie avec des *matrices et leurs valeurs propres*. On pourrait aussi utiliser l'*énergie*, ou encore un développement en séries de Fourier, ce qui ne sera pas fait ici.

Nous prendrons comme conditions initiales sur y et z les conditions suivantes : $y_0 = A_0 e^{ipx}$ et $z_0 = B_0 e^{ipx}$ où p est un réel, A_0 et B_0 des complexes. Intéressons nous tout d'abord au premier schéma (IV.5).

La solution du problème continu (III.21) s'écrit grâce aux formules établies précédemment :

$$\begin{cases} y = \frac{A_0 + B_0}{2} e^{ip(x+ct)} + \frac{A_0 - B_0}{2} e^{ip(x-ct)} \\ y = \frac{A_0 + B_0}{2} e^{ip(x+ct)} - \frac{A_0 - B_0}{2} e^{ip(x-ct)} \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Il apparaît que cette solution est *bornée* pour tout t , ce qui doit être aussi le cas de la *solution discrète*, c'est ce qu'on appelle la *stabilité*.

Nous allons démontrer par récurrence qu'il existe une matrice carrée \mathcal{A} de taille 2, indépendante de j et de n , telle que l'on ait pour le problème discret (où $i^2 = -1$) :

$$\boxed{\tilde{y}_j^n = A_n e^{ip \cdot jh}, \quad \tilde{z}_j^n = B_n e^{ip \cdot jh}, \quad \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \mathcal{A}^n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}}$$

\mathcal{A} s'appelle la matrice d'amplification du schéma.

Supposons la relation vérifiée jusqu'au rang n .

On remarque que $e^{ip \cdot (j+1)h} - e^{ip \cdot (j-1)h} = 2i e^{ip \cdot jh} \sin ph$.

Nous avons vu que (IV.5) :

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{z}_{j+1}^n - \tilde{z}_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

Donc :

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = A_n \cdot e^{ip \cdot jh} + c \frac{\tau}{2h} B_n \left(\cdot e^{ip \cdot (j+1)h} - \cdot e^{ip \cdot (j-1)h} \right) = \left(A_n + c \frac{\tau}{2h} 2i B_n \sin ph \right) \cdot e^{ip \cdot jh} \\ \tilde{z}_j^{n+1} = c \frac{\tau}{2h} A_n \left(\cdot e^{ip \cdot (j+1)h} - \cdot e^{ip \cdot (j-1)h} \right) + B_n \cdot e^{ip \cdot jh} = \left(c \frac{\tau}{2h} 2i A_n \sin ph + B_n \right) \cdot e^{ip \cdot jh} \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Soit,

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = A_{n+1} \cdot e^{ip \cdot jh} \\ \tilde{z}_j^{n+1} = B_{n+1} \cdot e^{ip \cdot jh} \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

La relation étant vraie au rang $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus,

$$\left\| \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \right\| \leq \|\mathcal{A}\|^n \cdot \left\| \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \right\| \quad (\text{V.5})$$

Pour que la solution reste bornée, et donc que le système soit *stable*,

$$\boxed{\text{il est ainsi nécessaire que } \|\mathcal{A}\| \leq 1}$$

V.1.2 Conditions de stabilité

Recherchons les conditions nécessaires pour que $\|\mathcal{A}\| \leq 1$ avec $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & ia \\ ia & 1 \end{pmatrix}$, et $a \stackrel{\text{def}}{=} c \frac{\tau}{h} \sin ph$.

On a clairement

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\overline{\mathcal{A}} = (1 + a^2)\mathbb{I} = \overline{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}\mathcal{A} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} \quad (\text{V.6})$$

\mathcal{A} est donc *normale*, d'où (démonstration en annexe) $\|\mathcal{A}\| = \rho(\mathcal{A})$. Il faut que les valeurs propres de \mathcal{A} soient de module inférieur ou égal à l'unité pour assurer la stabilité du schéma (IV.5) :

$$\boxed{\text{Schéma stable} \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(\mathcal{A}), |\lambda| \leq 1}$$

Or, ici,

$$\begin{vmatrix} X-1 & -ia \\ -ia & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) + a^2 = (X - (1+ia))(X - (1-ia)) \quad (\text{V.7})$$

Donc, les valeurs propres de \mathcal{A} sont $1+ia$ et $1-ia$ avec

$$|1+ia| = |1-ia| = \sqrt{c^2 \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 hp + 1} \geq 1 \quad (\text{V.8})$$

En conclusion, ce schéma "naturel" est inconditionnellement instable.

V.1.3 Les schémas

Schéma implicite

Nous avons déjà vu qu'il est possible de passer du schéma explicite au schéma implicite en permutant n et $n+1$, et en changeant τ en $-\tau$. La démonstration de la relation précédente sur l'existence de la matrice \mathcal{A} serait donc la même pour ce schéma, par conséquent elle ne sera pas refaite.

Alors :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -ia \\ -ia & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} \quad (\text{V.9})$$

Donc,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -ia \\ -ia & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 1 & ia \\ ia & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.10})$$

Cette matrice est normale et ses valeurs propres sont $(1+ia)^{-1}$ et $(1-ia)^{-1}$ avec

$$\left| (1+ia)^{-1} \right| = \left| (1-ia)^{-1} \right| = \frac{1}{\sqrt{c^2 \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 hp + 1}} \leq 1 \quad (\text{V.11})$$

Ce schéma implicite est donc *inconditionnellement stable*.

Deuxième schéma explicite

Rappelons succinctement que

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{z}_{j+1}^n - \tilde{z}_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^{n+1} - \tilde{y}_{j-1}^{n+1}) \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

et que

$$\tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) + c^2 \frac{\tau^2}{4h^2} (\tilde{z}_{j+2}^n - 2\tilde{z}_j^n + \tilde{z}_{j-2}^n) \quad (\text{V.13})$$

De plus,

$$e^{ip \cdot (j+1)h} - e^{ip \cdot (j-1)h} = 2i e^{ip \cdot jh} \sin ph \quad (\text{V.14})$$

et

$$e^{ip \cdot (j+2)h} - 2e^{ip \cdot jh} + e^{ip \cdot (j-2)h} = -4e^{ip \cdot jh} \sin^2 ph \quad (\text{V.15})$$

La première équation de (V.12) et (V.14) puis (V.13) et (V.15), nous amènent à :

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = A_n \cdot e^{ip \cdot jh} + c \frac{\tau}{2h} B_n (e^{ip \cdot (j+1)h} - e^{ip \cdot (j-1)h}) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = c \frac{\tau}{2h} A_n (e^{ip \cdot (j+1)h} - e^{ip \cdot (j-1)h}) + c^2 \frac{\tau^2}{4h^2} B_n (e^{ip \cdot (j+2)h} - 2e^{ip \cdot jh} + e^{ip \cdot (j-2)h}) + B_n \cdot e^{ip \cdot jh} \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

Soit,

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \left(A_n + c \frac{\tau}{2h} 2i B_n \sin ph \right) \cdot e^{ip \cdot jh} = A_{n+1} \cdot e^{ip \cdot jh} \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \left(c \frac{\tau}{2h} 2i A_n \sin ph + \left(1 - c^2 \frac{\tau^2}{4h^2} 4 \sin^2 ph \right) B_n \right) \cdot e^{ip \cdot jh} = B_{n+1} \cdot e^{ip \cdot jh} \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

Nous obtenons notre *matrice d'amplification* :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & ia \\ ia & 1 - a^2 \end{pmatrix} \quad (\text{V.18})$$

avec $a \stackrel{\text{def}}{=} c \frac{\tau}{h} \sin ph$.

Le polynôme caractéristique de la matrice \mathcal{A} s'écrit

$$\chi_{\mathcal{A}}(X) = X^2 - (2 - a^2)X + 1 \quad (\text{V.19})$$

Son discriminant est $\Delta = -4a^2 + a^2 = a^2(a^2 - 4)$.

- Si Δ est strictement positif, donc si $|a| > 2$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes dont le produit est 1 : $\frac{a^2 - 2 \pm a\sqrt{a^2 - 4}}{2}$. L'une d'elle est de valeur absolue inférieure à 1, et est acceptable, tandis que la deuxième solution est de valeur absolue supérieure à 1. De ce fait, le schéma est instable.
- Si Δ est négatif ou nul, c'est-à-dire que $|a| \leq 2$ donc que $\frac{c\tau}{h} \leq 2$, alors les solutions de $\chi_{\mathcal{A}}$ sont imaginaires conjuguées (ou égales toutes deux à -1), donc de même module 1, et le rayon spectral de \mathcal{A} est 1.

Le problème, est que \mathcal{A} n'est pas une matrice normale et donc que $\|\mathcal{A}\| \geq \rho(\mathcal{A})$. En fait, ce n'est pas très grave. On peut montrer que l'utilisation intensive du schéma, pour $\frac{c\tau}{h} \leq 2$, ne pourra jamais faire croître un vecteur que dans un rapport petit qui ne met pas en cause la stabilité. Finalement, la condition de stabilité est :

$$\boxed{\frac{c\tau}{h} \leq 2} \quad (\text{V.20})$$

Remarquons que la matrice \mathcal{A} n'est pas diagonalisable, et donc qu'il faut se méfier du cas $\frac{c\tau}{h} = 2$. On préférera donc se restreindre à la condition $\frac{c\tau}{h} < 2$.

Schéma de Lax

Portons les conditions initiales dans le schéma de Lax

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\tilde{y}_{j+1}^n + \tilde{y}_{j-1}^n) + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{z}_{j+1}^n - \tilde{z}_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\tilde{z}_{j+1}^n + \tilde{z}_{j-1}^n) + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

ce qui nous amène à la matrice d'amplification suivante :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos ph & ia \\ ia & \cos ph \end{pmatrix} \quad (\text{V.22})$$

avec $a \stackrel{\text{def}}{=} c \frac{\tau}{h} \sin ph$.

L'équation caractéristique de cette matrice est :

$$\chi_{\mathcal{A}}(X) = X^2 - 2\cos(ph)X + \cos^2(ph) + a^2 \quad (\text{V.23})$$

dont le discriminant $\Delta' = -a^2$ est toujours négatif. Les racines de $\chi_{\mathcal{A}}$ sont complexes conjuguées, donc de même module dont le carré est $|\lambda|^2 = \cos^2(ph) + a^2 = 1 - \sin^2(ph) \left(1 - \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2\right)$. La condition de stabilité se met ainsi sous la forme

$$\boxed{\frac{c\tau}{h} \leq 1} \quad (\text{V.24})$$

Cette inégalité est dite *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* (notée C.F.L.).

Schéma de Lax-Wendroff

La matrice d'amplification du schéma de Lax-Wendroff

$$\begin{cases} \tilde{y}_j^{n+1} = \tilde{y}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{z}_{j+1}^n - \tilde{z}_{j-1}^n) + c^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (\tilde{y}_{j+1}^n - 2\tilde{y}_j^n + \tilde{y}_{j-1}^n) \\ \tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_j^n + c \frac{\tau}{2h} (\tilde{y}_{j+1}^n - \tilde{y}_{j-1}^n) + c^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (\tilde{z}_{j+1}^n - 2\tilde{z}_j^n + \tilde{z}_{j-1}^n) \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

est

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 + c^2 \frac{\tau^2}{h^2} (\cos(ph) - 1) & ic \frac{\tau}{h} \\ ic \frac{\tau}{h} & 1 + c^2 \frac{\tau^2}{h^2} (\cos(ph) - 1) \end{pmatrix} \quad (\text{V.26})$$

Cette matrice est normale et

$$\chi_{\mathcal{A}}(X) = X^2 - 2[1 + \alpha(\cos ph - 1)]X + [1 + \alpha(\cos ph - 1)]^2 + \alpha \sin^2 ph \quad (\text{V.27})$$

avec $\alpha = \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2$. Le discriminant réduit $\Delta'' = -\alpha \sin^2 ph$ est négatif ou nul. Les deux racines imaginaires de $\chi_{\mathcal{A}}$ sont de même module, dont le carré est

$$|\lambda|^2 = 1 + \alpha(2\cos ph - 2 + 1 - \cos^2 ph) + \alpha^2(\cos ph - 1)^2 \quad (\text{V.28})$$

$$= 1 + \alpha(\cos ph - 1)^2(\alpha - 1) \quad (\text{V.29})$$

La condition équivaut donc à $\alpha < 1$, soit (condition C.F.L.)

$$\boxed{\frac{c\tau}{h} \leq 1} \quad (\text{V.30})$$

V.2 Comparaisons

V.2.1 Performances

Voici deux figures montrant les erreurs que font le deuxième schéma explicite et le schéma de Lax :

Différences entre les conditions réelles et le schéma explicite

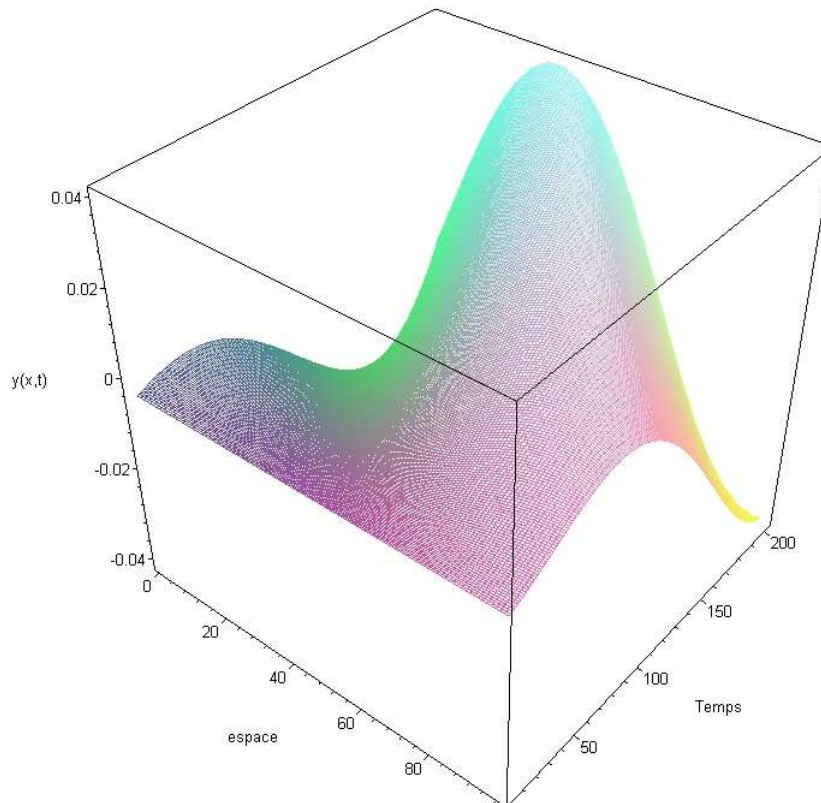


FIG. V.1 – Erreurs du deuxième schéma explicite

Différences entre les conditions réelles et le schéma de Lax

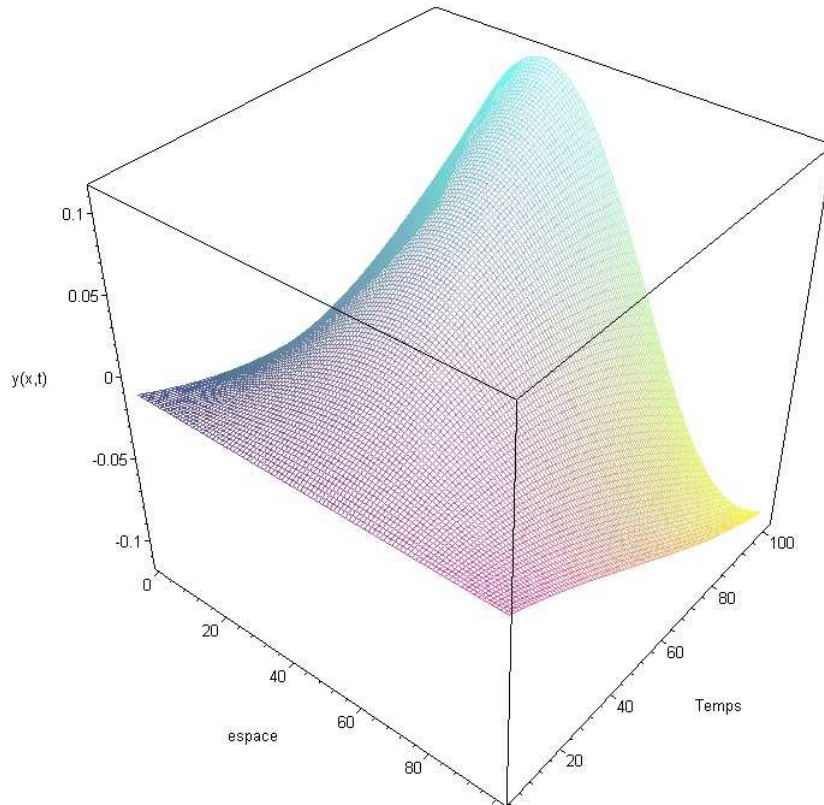


FIG. V.2 – Erreurs du schéma de Lax

Ces figures ne sont données qu'à titre indicatif, en effet, conformément à l'étude sur la stabilité, l'erreur dépend des valeurs prises pour τ et h .
On obtient évidemment les meilleurs résultats lorsque l'on se rapproche le plus possible de la condition C.F.L.

Voici les résultats au niveau des performances, où a_0 représente l'amplitude du signal sinusoïdal initial, p sa fréquence, l la longueur de la corde étudiée et n le nombre de paliers de temps :

Le premier tableau a été créé avec $h = 0.1$ et $\tau = 0.0004$ pour le deuxième schéma explicite, $\tau = 0.0002$ pour le schéma de Lax.

Conditions →		$p = 0.1; a_0 = 1; l = 50$		$p = 1; a_0 = 1; l = 50$		$p = 1; a_0 = 1; l = 65$		$p = 1; a_0 = 0.1; l = 50$	
Schémas ↓	Types ↓	$n = 200$	$n = 1000$	$n = 200$	$n = 1000$	$n = 200$	$n = 1000$	$n = 200$	$n = 1000$
Explicite	Temps (s)	3,83	156.21	3.94	156.33	5.27	209.40	4.04	172.64
Explicite	Mémoire utilisée (o)	37 909 102	425 413 614	37 921 246	425 456 386	46 059 326	475 020 942	37 928 710	425 550 402
Lax	Temps (s)	9,14	489.59	9.44	554.04	12.30	690.46	9.13	547.14
Lax	Mémoire utilisée (o)	71 616 174	776 593 942	75 658 954	799 371 014	92 356 482	907 386 622	75 615 434	799 307 334

31

Ce second tableau utilise $h = 0.1$ et $\tau = 0.0002$ pour le deuxième schéma explicite, $\tau = 0.0001$ pour le schéma de Lax.

Conditions →		$p = 0.1; a_0 = 1; l = 50$		$p = 1; a_0 = 1; l = 50$		$p = 1; a_0 = 1; l = 65$		$p = 1; a_0 = 0.1; l = 50$	
Schémas ↓	Types ↓	$n = 200$	$n = 1000$	$n = 200$	$n = 1000$	$n = 200$	$n = 1000$	$n = 200$	$n = 1000$
Explicite	Temps (s)	7.27	172.90	4.05	172.94	5.27	208.27	4.03	156.07
Explicite	Mémoire utilisée (o)	33 296 074	425 478 570	37 954 410	425 554 358	46 111 714	475 020 826	37 939 290	425 601 670
Lax	Temps (s)	7.82	537.24	9.33	544.59	12.10	682.31	9.35	496.70
Lax	Mémoire utilisée (o)	55 120 450	775 619 558	75 664 766	796 692 830	92 360 266	904 244 934	75 628 542	796 765 950

TAB. V.1 – Résultats des implémentations

Lors des tests, à la suite de chaque fonctions exécutées, nous avons relancé le logiciel de calcul formel MAPLE afin de réinitialiser sa memoire. Dans le cas contraire, une perte de performance de l'ordre de 15% en temps a été constatée lorsqu'un deuxième test est effectué.

V.2.2 Programmes

Nous avons réalisé les implémentations grâce au logiciel de calcul formel MAPLE, de la manière suivante :

```
%Déclarations préalables
restart:
with(plots):
with(linalg):

c := 100:
h:=0.1:
tau_exp := 2*h/c/5:
tau_lax := h/c/5:

%Les procédures permettant de construire les matrices contenant les valeurs approchées de y
%Construction du cas réel
construction_reel := proc( nb_point_temps, tau, p, a, l )
  local Y, j, i, n, la, largeur_matrice:

  largeur_matrice := 2*(nb_point_temps+1) + floor(l/h):

  Y := array(0..largeur_matrice-1, 0..nb_point_temps):

  for n from 0 to nb_point_temps do
    for j from n to largeur_matrice-n-1 do
      Y[j,n] := Re(evalf(a*exp(I*p*( j*h + c*n*tau )))):
    od:
  od:

  eval(Y)
end:

%Construction du deuxième schéma explicite
construction_exp := proc( nb_point_temps, p, a, l )
  local Y, i, j, n, la, largeur_matrice:

  la := evalf(tau_exp*c/(2*h)):
  largeur_matrice := 2*(nb_point_temps+1) + floor(l/h):

  Y := array(0..largeur_matrice-1, 0..nb_point_temps):

  for j from 0 to largeur_matrice-1 do
    Y[j,0] := Re(evalf(a*tau_exp(I*p*j*h))):
  od:

  for n from 1 to nb_point_temps do
    for j from n to largeur_matrice-n-1 do
      Y[j,n] := Y[j,n-1] + la*( Y[j+1,n-1]-Y[j-1,n-1] ):
    od:
  od:

  eval(Y)
end:

%Construction du schéma de Lax
construction_lax := proc( nb_point_temps, p, a, l )
  local Y, j, i, n, c1, c2, largeur_matrice:

  largeur_matrice := 2*(nb_point_temps+1) + floor(l/h):

  Y := array(0..largeur_matrice-1, 0..nb_point_temps):

  for j from 0 to largeur_matrice-1 do
    Y[j,0] := Re(evalf(a*exp(I*p*j*h))):
  od:

  c1 := evalf(0.5 + tau_lax*c/(2*h)):
```

```

c2 := evalf(0.5 - tau_lax*c/(2*h)):
for n from 1 to nb_point_temps do
  for j from n to largeur_matrice-n-1 do
    Y[j,n] := Y[j+1,n-1] * c1 + Y[j-1,n-1] * c2:
  od:
od:

eval(Y)
end:

%Calcul des différentes matrices
M_ex := convert(construction_exp(200, 0.1, 1, 50), matrix):
M_lax := convert(construction_lax(200, 0.1, 1, 50), matrix):
M_reel_ex := convert(construction_reel(200, .002, 0.1, 1, 50), matrix):
M_reel_lax := convert(construction_reel(200, .001, 0.1, 1, 50), matrix):

%On n'en prend qu'une certaine partie
M_ex_det := submatrix( M_ex, 201..301, 1..201 ):
M_lax_det := submatrix( M_lax, 201..301, 1..101 ):
M_reel_ex_det := submatrix( M_reel_ex, 201..301, 1..201 ):
M_reel_lax_det := submatrix( M_reel_lax, 201..301, 1..101 ):

setoptions3d( style=WIREFRAME, axes=BOXED, titlefont=[HELVETICA,BOLD,20], projection=0.8, orientation=[-51,53] ):

%Affichage des résultats
matrixplot( M_ex, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"], title="Schémas" );
matrixplot( M_lax, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"], title="Schémas de Lax" );
matrixplot( M_ex_det, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"], title="Schéma explicite dans la zone de détermination" );
matrixplot( M_reel_ex_det, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"], title="Conditions
réelles dans la zone de détermination" );
matrixplot( M_ex_det, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"], title="Schéma explicite
projeté dans le plan Oyt", orientation=[-90,90] );

matrixplot( M_reel_ex_det-M_ex_det, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"],
title="Différences entre les conditions réelles et le schéma explicite" );
matrixplot( M_reel_lax_det-M_lax_det, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"],
title="Différences entre les conditions réelles et le schéma de Lax" );

M_ex := convert(construction_exp(20, 0.1, 1, 50), matrix):
matrixplot( M_ex, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"], title="Schémas", projection=0.8,
orientation=[-90,90], style=POINT, axes=BOXED, titlefont=[HELVETICA,BOLD,20], symbol=CROSS );

M_ex := convert(construction_exp(20, 0.1, 1, 50), matrix):
matrixplot( M_ex, labels=[espace, Temps, "y(x,t)"], title="Schémas", projection=0.8,
orientation=[-90,90], style=POINT, axes=BOXED, titlefont=[HELVETICA,BOLD,20], symbol=CROSS );

```

On obtient notamment :

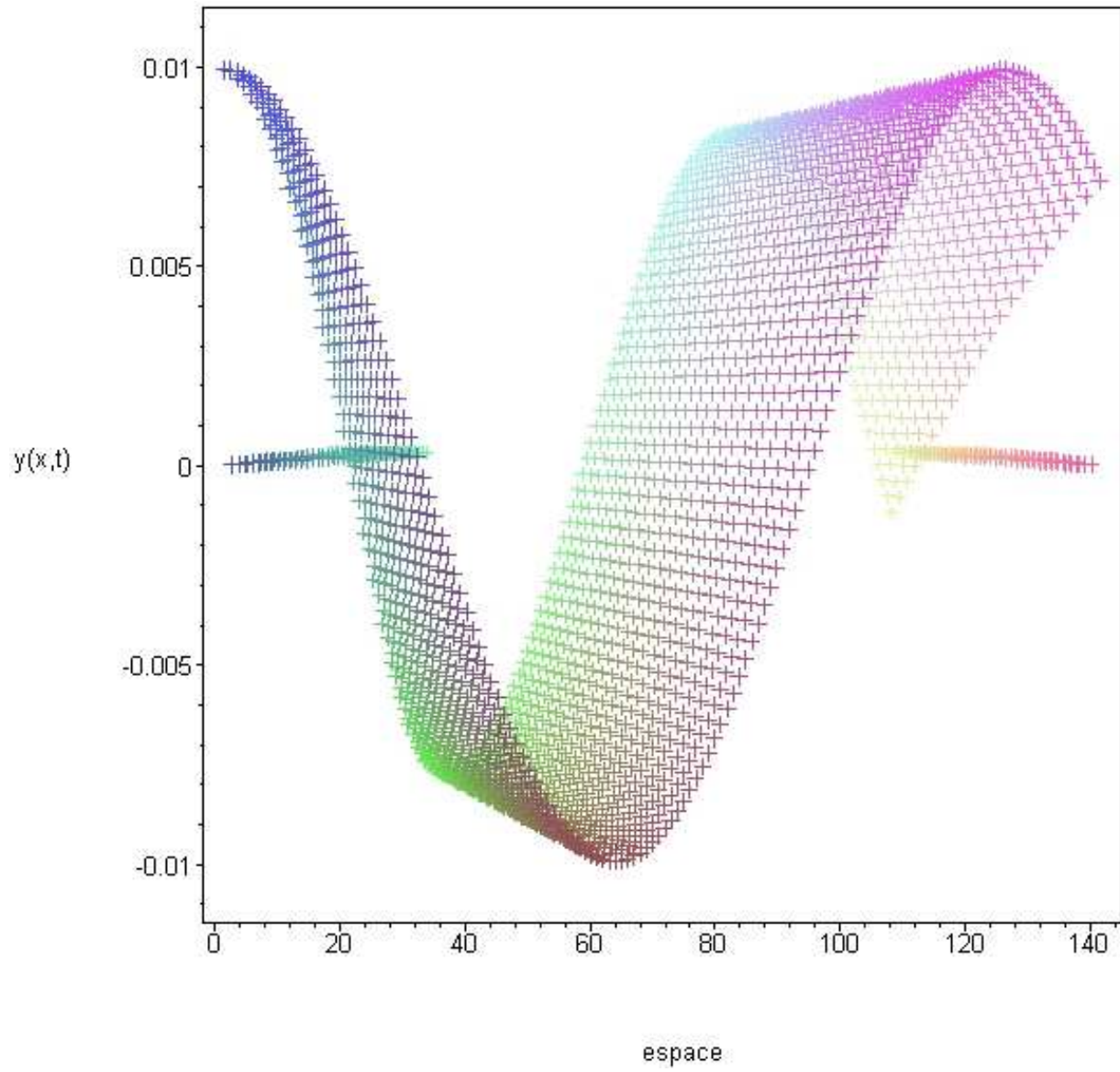


FIG. V.3 – Schéma explicite projeté et utilisé avec des petites croix

Chapitre VI

Conclusion

L'étude théorique nous a permis d'établir des bases qui n'ont pas toujours été suffisantes pour l'étude et l'implémentation des schémas. Nous n'avons pas réussi à programmer le schéma implicite, contrairement au schéma de Lax-Wendroff mais pour lequel nous n'avons jamais obtenu de résultats corrects.

Cependant, nous avons pu correctement effectuer les implémentations, sous le logiciel de calcul formel MAPLE et en C++, de la méthode naturelle avant la transformation du problème, et après la transformation, du deuxième schéma explicite et du schéma de Lax. Le calcul a bien été possible et satisfaisant.

Le respect des conditions de stabilité est crucial afin que la corde ne devienne pas un nouveau moyen de propulsion de fusées dans l'espace.

Les expérimentations, confrontées à la réalité se sont montrées satisfaisantes quant aux résultats attendus et ont confirmé l'étude théorique.

Le deuxième schéma (après transformation) s'est révélé être plus performant par rapport au schéma de Lax.

Table des figures

III.1	Découpage de l'espace et du temps	11
III.2	Maillage	13
III.3	Schéma naïf	15
III.4	Erreurs du schéma naïf	16
IV.1	Schéma explicite dans la zone de détermination	22
IV.2	Schéma explicite	23
IV.3	Schéma explicite projeté sur le plan $z = 0$	24
V.1	Erreurs du deuxième schéma explicite	29
V.2	Erreurs du schéma de Lax	30
V.3	Schéma explicite projeté et utilisé avec des petites croix	34